200. 個体領域ノ個數條件ニ就イテ. I

平 野 次 郎（阪大）

此処ニ極メテ断片的ニ個体領域ノ個数ニ就イテ述ベヨウト思フ、個数條件ニツイテハ一般ニ次ノ式ガ基本的デアル。

(1) $(Ex)(Ey)\cdots\cdots(Ev)(w)(w \neq x \,\&\, w \neq y \,\&\cdots\cdots\cdots\cdots \,\&\, w \neq v \longrightarrow A(w))$

$\backsim (x)(y)\cdots\cdots(v)(w)(x \neq y \,\&\, x \neq z \,\&\cdots\cdots\cdots\cdots \,\&\, v \neq w \longrightarrow A(x) \vee A(y) \vee \cdots\cdots \vee A(w))$

及ビ

(2) $(x)(y)\cdots\cdots(v)(Ew)(w \neq x \,\&\, w \neq y \,\&\cdots\cdots\cdots\cdots \,\&\, w \neq v \,\&\, A(w))$

$\backsim (Ex)(Ey)\cdots\cdots(Ev)(w)(x \neq y \,\&\, x \neq z \,\&\cdots\cdots\cdots\cdots \,\&\, v \neq w \,\&\, A(x) \,\&\, A(y) \,\&\cdots\cdots \,\&\, A(w))$

(D. Hilbert u. P. Bemarp: Grundlagen der Mathematik S. 173.)

ソコデハ非常ニ煩雑デアルト云フ理由デ、此ノ証明(Ableitung)ガ與ヘラレテヰナイ。然シ、コノ式ハ重要ナ式デアルカラ初メニ之レニツイテ証明ヲ與ヘテ見タイト思フ。新タナル Princip ヲ使用セズニ他ニ簡單ナ証明ガアレバ御啓示ヲ御願ヒシタイ。

Lemma: $F_m(a, A) \longrightarrow A(b) \vee F_m(b, A)$

コヽニ

$$F_m(a,A):\ \prod_{i=1}^{m}(x_i)\Big(\sum_{i\neq j}^{1.m}(x_i\neq x_j)\ \&\ \sum_{i=1}^{m}(x_i\neq a)$$

$$\longrightarrow \prod_{i=1}^{m}A(x_i)\Big)$$

$m=1$ ノトキハ、 $F_1(a,A):(x)(x\neq a\longrightarrow A(x))$

$$F_1(a,A)\backsim(x)A(x)\vee\Big(\bar{A}(a)\ \&\ (x)(y)(x\neq y$$

$$\longrightarrow A(x)\vee A(y)\Big)$$

$$F_1(a,A)\longrightarrow(x)A(x)\vee({}_2x)A(x)$$

$(x)A(x)\longrightarrow({}_2x)A(x)$ ヨリ $(x)A(x)\vee({}_2x)A(x)\backsim({}_2x)A(x)$

$$F_1(a,A)\longrightarrow(x)(y)(x\neq y\rightarrow A(x)\vee A(y))$$

$(x)(y)\big(x\neq y\longrightarrow A(x)\vee A(y)\big)\longrightarrow(x)\big(x\neq b\rightarrow A(x)\big)\vee A(b).$

$(y=b)$

Kettenschluß ヨリ $F_1(a,A)\longrightarrow F_1(b,A)\vee A(b)$

次ニ

$$F_{m-1}(a,A)\longrightarrow F_{m-1}(b,A)\vee A(b)$$

ヲ仮定スル。

$$F_m(a,A):\prod_{i=1}^{m}(x_i)\Big(\sum_{i\neq j}^{m}(x_i\neq x_j)\ \&\ \sum_{i=1}^{m}(x_i\neq a)\rightarrow\prod_{i=1}^{m}A(x_i)\Big)$$

$$F_m(a,A)\rightarrow\prod_{i=1}^{m-1}(x_i)\Big(\sum_{i\neq j}^{m-1}(x_i\neq x_j)\ \&\ \sum_{i=1}^{m-1}(x_i\neq a)$$

$$\longrightarrow\prod_{i=1}^{m-1}\big(x_i=b\vee A(x_i)\big)\Big)$$

$$\vee\ a=b\vee A(b).\qquad(x_m=b)$$

$$F_m(a, A) \longrightarrow F_{m-1}(a, \mathfrak{A}) \vee a = b \vee A(b).$$

$$\mathfrak{A}:\ x = b \vee A(x)$$

假定ヨリ

$$F_{m-1}(a, \mathfrak{A}) \longrightarrow F_{m-1}(c, \mathfrak{A}) \vee \mathfrak{A}(c)$$

$F_{m-1}(c, \mathfrak{A}) \vee \mathfrak{A}(c)$:

$$\prod_{i=1}^{m-1}(x_i)\left(\sum_{i \neq j}^{1, m-1}(x_i \neq x_j) \,\&\, \sum_{i=1}^{m-1}(x_i \neq c) \,\&\, \sum_{i=1}^{m-1}(x_i \neq b)\right.$$

$$\left.\&\, c \neq b \rightarrow \left(\prod_{i=1}^{m-1} A(x_i)\right) \vee A(c)\right):\ G_{m-1}(b, c)$$

故ニ、$F_m(a, A) \longrightarrow a = b \vee A(b) \vee G_{m-1}(b, c)$

$$F_m(a, A) \,\&\, a \neq b \,\&\, \bar{A}(b) \longrightarrow G_{m-1}(b, c)$$

$$F_m(a, A) \,\&\, a \neq b \,\&\, \bar{A}(b) \longrightarrow (z)\, G_{m-1}(b, z)$$

$(z)\, G_{m-1}(b, z):\ F_m(b, A)$

故ニ

$$F_m(a, A) \longrightarrow a = b \vee A(b) \vee F_m(b, A)$$

$a = b \longrightarrow \bar{F}_m(a, A) \vee F_m(b, A)$ ヨリ

$$F_m(a, A) \longrightarrow A(b) \vee F_m(b, A).$$

Q. E. D.

(1) $$\prod_{i=1}^{m-1}(Ex_i)(x_m)\left(\sum_{i=1}^{m-1}(x_m \neq x_i) \rightarrow A(x_m)\right)$$

$$\backsim \prod_{i=1}^{m}(x_i)\left(\sum_{i \neq j}^{1, m}(x_i \neq x_j) \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} A(x_i)\right)$$

(2) ハ (1) ト *dual* デアルカラ (1) ノミヲ証明スレバヨイ。

$m=1$ ノトキハ既ニ成立スル故 m デ成立スルモノト假定シ $m+1$ ノトキ又成立スルコトヲ証明スル。

(1) ニ於テ、$A(x)$ ノ代リニ $x=a \vee A(x)$ ヲ代入スルトキハ (1) ニ於ケル *getundene Variablen* ヲ変換シテ

$$\prod_{i=1}^{m}(Ex_i)(x_{m+1})\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i \neq x_{m+1}) \longrightarrow A(x_{m+1})\right)$$

$$\backsim (Ex_1)\prod_{i=2}^{m+1}(x_i)\left(\sum_{i,j}^{1,m+1}(x_i \neq x_j) \longrightarrow \prod_{i=2}^{m+1}A(x_i)\right) \cdots\cdots (1')$$

Lemma ヨリ $F_m(a,A) \longrightarrow A(b) \vee F_m(b,A)$

α). $F_m(a,A) \longrightarrow (z)\left(A(z) \vee F_m(z,A)\right)$

右辺ハ $\prod_{i=1}^{m+1}(x_i)\left(\sum_{i\neq j}^{1,m+1}(x_i \neq x_j) \longrightarrow \prod_{i=1}^{m+1}A(x_i)\right)$:

$$({}_{m+1}x)\,A(x)$$

$$F_m(a,A) \longrightarrow ({}_{m+1}x)\,A(x)$$

β). $(Ez)F_m(z,A) \longrightarrow ({}_{m+1}x)\,A(x)$

コノ左辺ハ (1') ノ右辺デアル。(*getundene Variablen* ノ記号ハ適當ニ附ケレバヨイ)。

逆ニ $\prod_{i=1}^{m+1}(x_i)\left(\sum_{i\neq j}^{1,m+1}(x_i \neq x_j) \longrightarrow \prod_{i=1}^{m+1}A(x_i)\right)$

$$\longrightarrow F_m(a,A) \vee A(a)$$

然ルニ

$$F_m(a,A) \vee A(a) \backsim \overline{F}_m(a,A) \to A(a)$$

$$({}_{m+1}x)A(x) \to \left(\overline{F}_m(a,A) \to A(a)\right)$$

∴) $$({}_{m+1}x)A(x) \to (z)\left(\overline{F}_m(z,A) \to A(z)\right)$$

$$(z)\left(\overline{F}_m(z,A) \to A(z)\right) \to \left((z)\overline{F}_m(z,A) \to (z)A(z)\right)$$

$$〃 \qquad \to (z)A(z) \vee (Ez)F_m(z,A)$$

$(z)A(z) \to (Ez)F_m(z,A)$ ヨリ

Kettenschluß ニヨリ

$$({}_{m+1}x)A(x) \to (Ez)F_m(z,A)$$

右辺ハ(1′)ノ右辺デアルカラ之デ証明サレタ。

コノ場合ノ Induktion ハ勿論有限的ノ意味デアル。

—(未 完)—